**Trabajo Práctico N° 3:**

**Autovalores y Autovectores.**

**Ejercicio 1.**

**Ejercicio 21 (\*).**

*Sea A una matriz tal que = 1 es autovalor de A, tr(A)= 2 y det(A)= -2.*

**(a)** *Hallar todos los autovalores de A.*

En primer lugar, se sabe que 1 es autovalor de la matriz A .

Luego, sabiendo que la traza de una matriz es igual a la suma de sus autovalores y que tr(A)= 2, se tiene:

2= 1 + +

2 - 1= +

1= + .

También, sabiendo que el determinante de la matriz A es igual al producto de todos los autovalores y que det(A)= -2, se tiene:

-2= .

Entonces, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

.

Despejando de la segunda ecuación, se tiene:

= , 0.

Luego, reemplazando en la primera ecuación, se obtiene:

1= +

1=

= - 2

- - 2= 0, 0.

Resolviendo mediante el método de Bhaskara, se hallan los autovalores faltantes:

, =

, =

, =

, =

= = = -1.

= = = 2.

Por lo tanto, los autovalores de A son: = 1, = -1 y = 2.

**(b)** *Decidir si es o no diagonalizable.*

Se sabe que la matriz A tiene n (3) autovalores distintos (inciso anterior) y que los n (3) autovectores asociados a estos autovalores distintos son linealmente independientes (teorema).

También, dado que la matriz A tiene n (3) autovectores linealmente independientes, se sabe que la matriz A es diagonalizable (teorema).

Entonces, esta matriz A se puede expresar de la siguiente manera:

A= PD,

donde D, P , tal que D es diagonal y P es inversible.

Si se aplica transpuesta a ambos lados de la igualdad, se tiene:

=

= .

Sabiendo que toda matriz diagonal es simétrica (D= ) y que la transpuesta de la inversa de una matriz es igual a la inversa de la transpuesta de esa matriz, se tiene:

= .

Por último, sabiendo que la inversa de la inversa de una matriz es la propia matriz, esta última igualdad se puede reexpresar de la siguiente manera:

= .

Por lo tanto, es diagonalizable, ya que es es semejante a una matriz diagonal, es decir, existen D, , tal que D es diagonal y es inversible.